**Ein Sieb für Primzahlzwillinge**[a]

Andreas Ernst[b]
*Fraktalikum Druck & Verlag, Heidelberg*

Gewöhnliche Primzahlprogramme sieben die Primzahlen bis zur gewünschten oberen Schranke und suchen dann nach Primzahlzwillingen. Hier wird eine Siebmethode präsentiert, die direkt die Primzahlzwillinge heraussieht.

## 1 Einleitung

Die ersten Paare von Primzahlzwillingen sind 3,5; 5,7; 11,13; 17,19;... . Es ist leicht zu beweisen, dass, wenn $(n-1,\, n+1)$ ein Primzahlzwilling ist, $n-1 \neq 3$, dann ist $n$ durch 6 teilbar. Wenn wir diese Eigenschaft der Primzahlzwillinge benutzen, ist es möglich, einen Primzahlzwilling $(n-1,\, n+1)$, $n-1 \neq 3$, durch die Zahl $n/6$ zu charakterisieren. Die ersten hundert natürlichen Zahlen enthalten die folgenden Zahlen, die jeweils einen Primzahlzwilling charakterisieren:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{1}$ | $\underline{2}$ | $\underline{3}$ | 4 | $\underline{5}$ | 6 | $\underline{7}$ | 8 | 9 | $\underline{10}$ |
| 11 | $\underline{12}$ | 13 | 14 | 15 | 16 | $\underline{17}$ | $\underline{18}$ | 19 | 20 |
| 21 | 22 | $\underline{23}$ | 24 | $\underline{25}$ | 26 | 27 | 28 | 29 | $\underline{30}$ |
| 31 | $\underline{32}$ | $\underline{33}$ | 34 | 35 | 36 | 37 | $\underline{38}$ | 39 | $\underline{40}$ |
| 41 | 42 | 43 | 44 | $\underline{45}$ | 46 | $\underline{47}$ | 48 | 49 | 50 |
| 51 | $\underline{52}$ | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | $\underline{58}$ | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | $\underline{70}$ |
| 71 | $\underline{72}$ | 73 | 74 | 75 | 76 | $\underline{77}$ | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | $\underline{87}$ | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | $\underline{95}$ | 96 | 97 | 98 | 99 | $\underline{100}$ |

## 2 Ein Sieb für Primzahlzwillinge

Thomas R. Nicely, der Mann, der den gefährlichen Intel-Pentium-Fehler entdeckte, bemerkt:

> "Also unlike the individual primes, no indirect method is known for enumerating the twins; my investigation, like the others, simply sieves the individual primes to the desired upper bound, then checks directly for the twin pairs among them." [1]

Hier wird eine Siebmethode präsentiert, die es erlaubt, die Primzahlzwillinge direkt herauszusieben, in gewisser Weise ähnlich dem Sieb des Erathostenes. Wir streichen alle Zahlen durch, die kongruent sind zu

$$\pm n \bmod (6n \pm 1), \tag{1}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, ausgenommen für jedes $n$ die erste Zahl, die zum ersten Pluszeichen gehört.

Wir beginnen damit, alle Zahlen kongruent zu 1 mod 5 durchzustreichen, beginnend mit 6, dann alle Zahlen kongruent zu -1 mod 5, beginnend mit 4. Die durchgestrichenen

[a] veröffentlicht am 7.4.2022
[b] email: info@fraktalikum.de

Zahlen sind 6, 11, 16, 21, 26, ... beziehungsweise 4, 9, 14, 19, 24, ... . Dann streichen wir alle Zahlen durch, die kongruent zu 1 mod 7 sind, beginnend mit 8, und danach streichen wir alle Zahlen durch, die kongruent zu -1 mod 7 sind, wiederum beginnend mit 6. Die ersten durchgestrichenen Zahlen sind 8, 15, 22, 29, 36,... und 6, 13, 20, 27, 34, .... Wir fahren fort mit den Zahlen kongruent zu 2 mod 11, -2 mod 11, 2 mod 13, -2 mod 13 und so weiter. Die verbleibenden Zahlen sind die oben unterstrichenen Zahlen, von denen jede einen Primzahlzwilling repräsentiert.

Wenn man testen möchte, ob eine Zahl $t$ einen Primzahlzwilling repräsentiert, muss man testen, ob die Zahl kongruent zu $\pm n \bmod (6n \pm 1)$ für $n = 1$ bis zur kleinsten natürlichen Zahl größer als $\frac{t+1}{5}$, wobei $t - n \neq 0$. Wenn der Test für ein $n$ fehlschlägt, dann repräsentiert $t$ keinen Primzahlzwilling. Wenn der Test nicht fehlschlägt, repräsentiert $t$ einen Primzahlzwilling.

## 3 Quellenangaben


1. Thomas R. Nicely, *Enumeration to* $10^{14}$ *of the twin primes and Brun's constant*, Virginia Journal of Science **46** (3), 195-204 (1995); zum Download unter: *http://www.trnicely.net/twins/twins.html*.